Hoofdstuk 16: Toepassingen van de differentiaalrekening

16.1 De afgeleide functie

Opgave 1:

a. $f(x) = 6x^4 + 6\sqrt{x} - \dfrac{6}{x^4} = 6x^4 + 6x^{\frac{1}{2}} - 6x^{-4}$

$f'(x) = 24x^3 + 3x^{-\frac{1}{2}} + 24x^{-5} = 24x^3 + \dfrac{3}{\sqrt{x}} + \dfrac{24}{x^5}$

b. $g(x) = 5\sqrt{x^2 - 8} = 5\sqrt{u} = 5u^{\frac{1}{2}}$ met $u = x^2 - 8$ dus $u' = 2x$

$g'(x) = 2\tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \dfrac{5}{2\sqrt{u}} \cdot u' = \dfrac{5}{2\sqrt{x^2 - 8}} \cdot 2x = \dfrac{5x}{\sqrt{x^2 - 8}}$

c. $h(x) = \dfrac{3x^2 - 2x + 1}{x} = \dfrac{3x^2}{x} - \dfrac{2x}{x} + \dfrac{1}{x} = 3x - 2 + x^{-1}$

$h'(x) = 3 - x^{-2} = 3 - \dfrac{1}{x^2}$

d. $k(x) = 3(2x-1)^7 + 8x = 3u^7 + 8x$ met $u = 2x - 1$ dus $u' = 2$

$k'(x) = 21u^6 \cdot u' + 8 = 21(2x-1)^6 \cdot 2 + 8 = 42(2x-1)^6 + 8$

Opgave 2:

a. $A = \dfrac{3}{t} + 3\sqrt{t} - 3t = 3t^{-1} + 3t^{\frac{1}{2}} - 3t$

$\dfrac{dA}{dt} = -3t^{-2} + 1\tfrac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} - 3 = -\dfrac{3}{t^2} + \dfrac{3}{2\sqrt{t}} - 3$

b. $P = 5q^2 + \sqrt{6q + 15} = 5q^2 + \sqrt{u} = 5q^2 + u^{\frac{1}{2}}$ met $u = 6q + 15$ dus $u' = 6$

$P'(q) = 10q + \tfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = 10q + \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u' = 10q + \dfrac{1}{2\sqrt{6q+15}} \cdot 6 = 10q + \dfrac{3}{\sqrt{6q+15}}$

c. $R = \dfrac{6p^2 + 2p + 3}{p} = \dfrac{6p^2}{p} + \dfrac{2p}{p} + \dfrac{3}{p} = 6p + 2 + 3p^{-1}$

$\dfrac{dR}{dp} = 6 - 3p^{-2} = 6 - \dfrac{3}{p^2}$

Opgave 3:

a. $\dfrac{f(1{,}9) - f(1{,}5)}{1{,}9 - 1{,}5} = \dfrac{7{,}93 - 7{,}84}{0{,}4} = 0{,}22$

b. $f(x) = -0{,}5(x^2 - 3)^4 + 8 = -0{,}5u^4 + 8$ met $u = x^2 - 3$ dus $u' = 2x$

$f'(x) = -2u^3 \cdot u' = -2(x^2 - 3)^3 \cdot 2x = -4x(x^2 - 3)^3$

$f'(3) = -2592$

c. $y_A = f(1) = 0$

$f'(1) = 32$

$y = 32x + b$ door $(1{,}0)$

$0 = 32 + b$

$b = -32$

$y = 32x - 32$

Opgave 4:

a. $g(x) = 2x - \frac{4}{x} + 1 = 2x - 4x^{-1} + 1$

$g'(x) = 2 + 4x^{-2} = 2 + \frac{4}{x^2}$

$g'(3) = 2\tfrac{4}{9} > 0$ dus g stijgt

b. $y_P = 3$

$g'(2) = 3$

$y = 3x + b$ door $(2,3)$

$3 = 6 + b$

$b = -3$

$l: \quad y = 3x - 3$

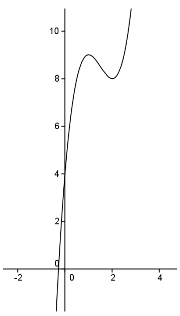
c. $g'(x) = 2 + \frac{4}{x^2} = 9$

$\frac{4}{x^2} = 7$

$x^2 = \tfrac{4}{7}$

$x = \sqrt{\tfrac{4}{7}} \quad \vee \quad x = -\sqrt{\tfrac{4}{7}}$

Opgave 5:



a. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 4$

$y' = 6x^2 - 18x + 12$

$y'(3) = 12$

b. $\frac{y(3{,}01) - y(3)}{0{,}01} = \frac{13{,}12 - 13}{0{,}01} = 12{,}1$

$\frac{12{,}1 - 12}{12} \cdot 100\% = 0{,}8\%$

c. $y'(2) = 0$

in de grafiek zie je dat je te maken hebt met een minimum

d. $y_P = f(4) = 36$

$y'(4) = 36$

$y = 36x + b$ door $(4,36)$

$36 = 144 + b$

$b = -108 \quad k: \quad y = 36x - 108$

Opgave 6:

a. $q' = 25 - 7p^{0,4}$

$q'(12{,}50) = 5{,}78$ euro per stuk

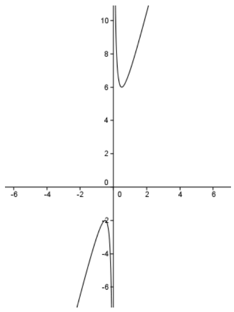
b. $q' = 25 - 7p^{0,4} = 0$

$y_1 = 25 - 7x^{0,4}$ de optie zero geeft: $x = 24{,}10$

$q(24{,}10) = 252$ dus 252 stuks

Opgave 7:

a. $y = 4x + \frac{1}{x} + 2 = 4x + x^{-1} + 2$



$y' = 4 - x^{-2} = 4 - \frac{1}{x^2} = 0$

$\frac{1}{x^2} = 4$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x = \frac{1}{2} \quad \vee \quad x = -\frac{1}{2}$

$\min\ f(\frac{1}{2}) = 6$

b. $y = 2\sqrt{6x - x^2} + 8 = 2\sqrt{u} + 8 = 2u^{\frac{1}{2}} + 8$ met $u = 6x - x^2$ dus $u' = 6 - 2x$

$y' = u^{-\frac{1}{2}} \cdot u' = \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot u' = \frac{1}{\sqrt{6x - x^2}} \cdot (6 - 2x) = \frac{6 - 2x}{\sqrt{6x - x^2}} = 0$

$6 - 2x = 0$

$-2x = -6$

$x = 3$

$\max\ f(3) = 14$

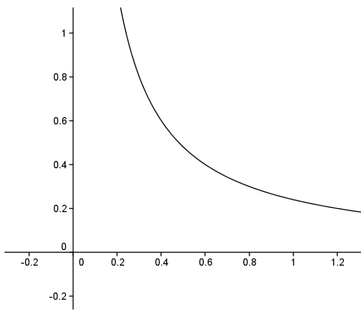
Opgave 8:

a. $E(n) = 0{,}48n - 0{,}006n^2$

$E'(n) = 0{,}48 - 0{,}012n$

$E'(40) = 0$

b. $E'(n) = 0{,}48 - 2an$



$E'(16) = 0{,}48 - 32a = 0$

$-32a = -0{,}48$

$a = 0{,}015$

c. $E'(n) = 0{,}48 - 2an = 0$

$-2an = -0{,}48$

$n = \frac{0{,}24}{a}$

Opgave 9:

$K' = 3 \cdot 10^{-6} q^2 - 6 \cdot 10^{-3} q + 5 = 0$

K' geeft de snelheid waarmee de kosten veranderen, dus als deze snelheid minimaal moet zijn moet je K' differentiëren.

$K'' = 6 \cdot 10^{-6} q - 6 \cdot 10^{-3} = 0$

$6 \cdot 10^{-6} q = 6 \cdot 10^{-3}$

$q = 1000$

$K'(1000) = 2$ dus 2 euro per stuk

Opgave 10:

a. $N'(t) = -3t^2 + 12t + 15$

$N''(t) = -6t + 12 = 0$

$-6t = -12$

$t = 2$ dus na 2 uur

b. $N'(0) = 15$

$N'(t) = -3t^2 + 12t + 15 = 15$

$-3t^2 + 12t = 0$

$-3t(t-4) = 0$

$t = 0 \quad \vee \quad t = 4$

dus na 4 uur

Opgave 11:

Grafiek C

De kosten zijn eerst afnemend stijgend en daarna toenemend stijgend.

De helling is overal positief maar daalt eerst en stijgt daarna.

Opgave 12:

a. de grafiek van *y* daalt
b. de grafiek van *y* gaat over van toenemend stijgend in afnemend stijgend
c. de grafiek van *y* gaat over van afnemend dalend in toenemend dalend
d. de grafiek van *y* gaat over van afnemend stijgend in toenemend stijgend
e. de grafiek van *y* is afnemend stijgend
f. de grafiek van *y* heeft een minimum

Opgave 13:

a. de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt onder de *x*-as en stijgt
b. de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ stijgt en snijdt de *x*-as
c. de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ ligt boven de *x*-as en daalt
d. de grafiek van $\frac{dy}{dx}$ heeft een laagste punt dat boven de *x*-as ligt

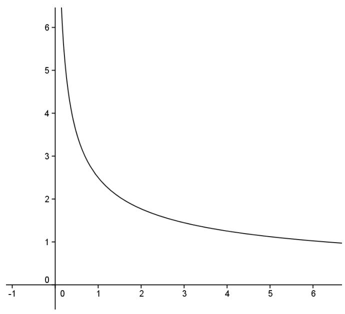
Opgave 14:

$y = 5\sqrt{x} - 3 = 5x^{\frac{1}{2}} - 3$

$y' = 2\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{5}{2\sqrt{x}}$

De grafiek van y' ligt boven de *x*-as, dus de grafiek van *y* stijgt.

De grafiek van y' daalt, dus de grafiek van *y* is afnemend stijgend.



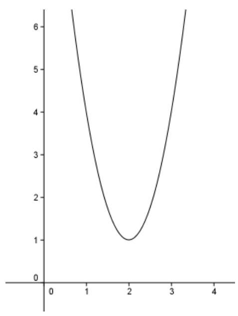
Opgave 15:

a. $K' = 3q^2 - 12q + 13$

de grafiek van K' ligt boven de *x*-as, dus de grafiek van *K* stijgt

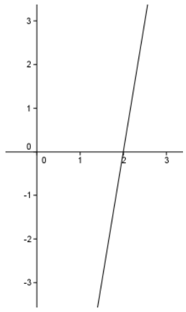
de grafiek van K' daalt eerst dus is er sprake van een afnemende stijging

daarna stijgt de grafiek van K' dus is er sprake van een toenemende stijging



b. $MK = 3q^2 - 12q + 13$

$\dfrac{dMK}{dq} = 6q - 12$



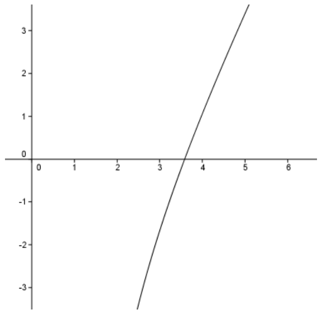
De grafiek van $\dfrac{dMK}{dq}$ ligt eerst onder de x-as, dus de grafiek van MK daalt.

Daarna ligt de grafiek van $\dfrac{dMK}{dq}$ boven de x-as, dus de grafiek van MK stijgt.

Dus de marginale kosten MK nemen een minimale waarde aan.

c. $GK = \dfrac{K}{q} = \dfrac{q^3 - 6q^2 + 13q + 15}{q} = q^2 - 6q + 13 + \dfrac{15}{q}$

$\dfrac{dGK}{dq} = 2q - 6 - \dfrac{15}{q^2}$



De grafiek van $\dfrac{dGK}{dq}$ ligt eerst onder de x-as dus de grafiek van GK daalt.

De grafiek van $\dfrac{dGK}{dq}$ ligt daarna boven de x-as dus de grafiek van GK stijgt.

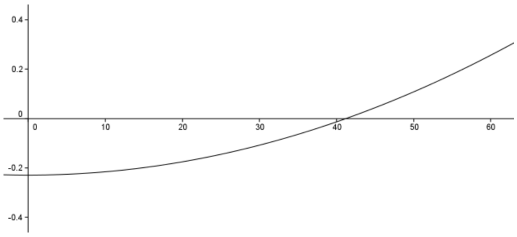
Dus de gemiddelde kosten GK nemen een minimale waarde aan.

<u>Opgave 16:</u>

a. $N(63) = 97{,}6$

dus $\dfrac{97{,}6}{197{,}6} \cdot 290 = 143{,}3$ miljoen mannen

b. $\dfrac{dN}{dt} = 0{,}000135t^2 - 0{,}2295$



de grafiek van $\dfrac{dN}{dt}$ ligt eerst onder de x-as, dus de grafiek van N daalt.

Daarna ligt de grafiek van $\dfrac{dN}{dt}$ boven de x-as, dus de grafiek van N stijgt.

Dus N neemt een minimale waarde aan.

c. $\dfrac{dN}{dt} = 0{,}000135t^2 - 0{,}2295 = 0$

$0{,}000135t^2 = 0{,}2295$

$t^2 = 1700$

$t = 41{,}2$ dus in 1981

$N(41{,}2) = 94{,}5$

$\dfrac{94{,}5}{194{,}5} \cdot 100\% = 48{,}6\%$